Bac 2023 Métropole septembre Jour 2 Correction © https://labolycee.org
EXERCICE 3 - IMPRIMANTE À JET D'ENCRE CONTINU (5 points)

De nombreuses applications technologiques, dans des domaines très variés, reposent sur l'utilisation d'un champ électrique.

L'objectif de cet exercice est d'étudier le principe de fonctionnement des imprimantes à jet d'encre continu dévié, principalement utilisées pour imprimer les dates d'expiration figurant sur les produits alimentaires.

D'après le site domino-printing.com

On donne sur le schéma de la figure 1, le principe de fonctionnement de l'imprimante à jet d'encre continu dévié : le jet d'encre sort de la tête d'impression par une buse qui le décompose en très petites gouttes dont certaines sont chargées électriquement.

Celles-ci passent sous un déflecteur constitué de deux plaques P_1 et P_2 parallèles, chargées électriquement, assimilables à un condensateur plan. Ces plaques dévient les gouttes chargées de leur trajectoire initiale.

Les gouttes non chargées poursuivent quant à elles leur mouvement rectiligne vers une gouttière de recyclage et sont réintégrées dans le module d'encre afin d'être réutilisées.

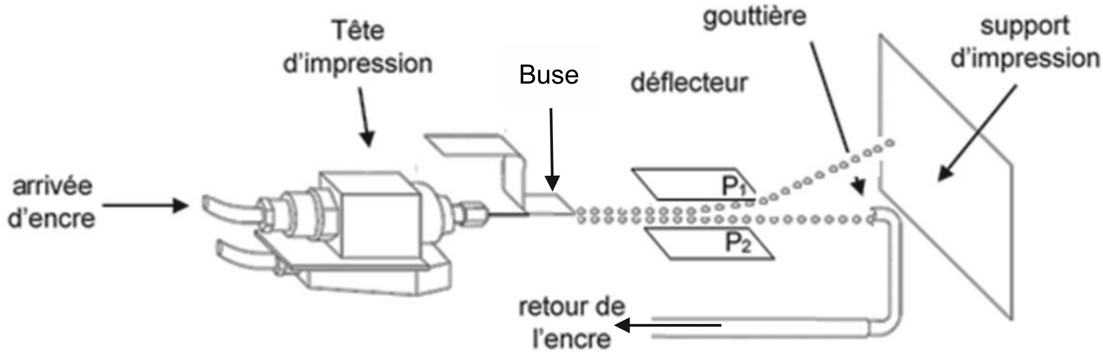


Figure 1. Schéma de principe de l'imprimante à jet d'encre continu dévié (d'après le site timis.fr)

Données :

- les mouvements sont étudiés dans le référentiel terrestre supposé galiléen associé au repère $(O,\vec{i},\vec{k})$ représentés sur la figure 2. Les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{k}$ sont unitaires ;
- on considère que la charge électrique et la masse des gouttes d'encre restent constantes entre la buse et le support d'impression ;
- masse d'une goutte d'encre : $m = 2\times10^{-10}$ kg ;
- charge électrique d'une goutte : $q = -4\times10^{-13}$ C ;
- valeur de la vitesse d'éjection des gouttes d'encre : $v_0 = 20$ m·s^{-1} ;
- longueur des plaques du déflecteur : $L = 2$ cm ;
- distance entre le déflecteur et le support d'impression : $D = 3$ cm ;
- le champ électrique est supposé uniforme dans le déflecteur, il s'écrit $\vec{E} = -E.\vec{k}$ avec $E = 9\times10^5$ V·m^{-1} ;
- le champ électrique est nul à l'extérieur du déflecteur ;
- hauteur moyenne d'un caractère imprimé : $h = 3$ mm ;
- intensité de la pesanteur : $g = 9,81$ m·s^{-2}.

On étudie le mouvement d'une goutte d'encre G, supposée ponctuelle, de masse *m* et de charge *q* négative.

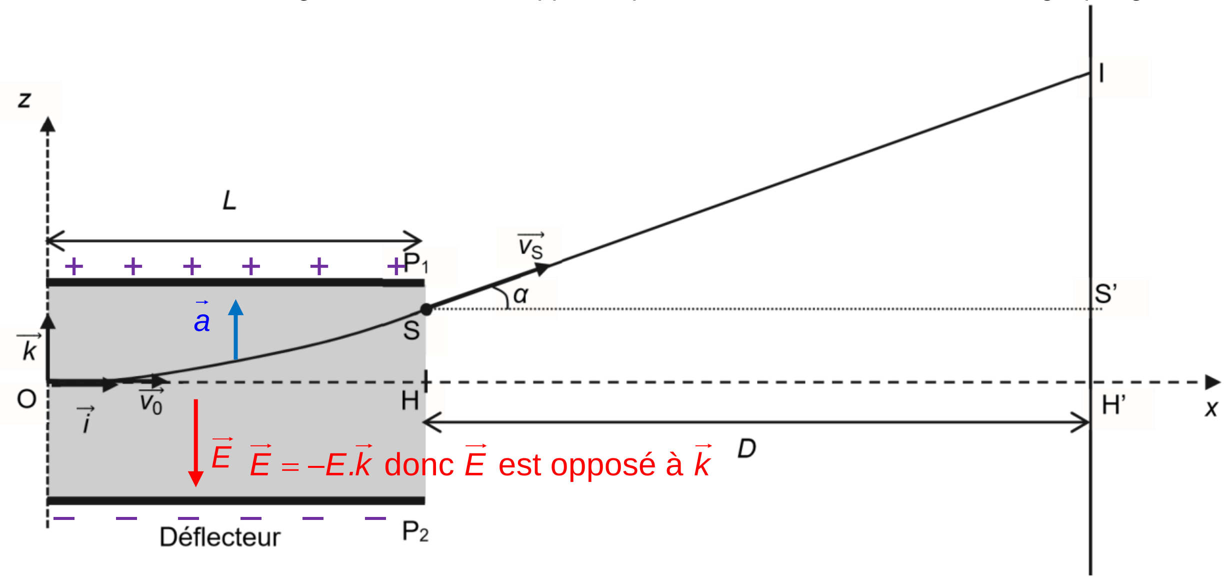


Figure 2. Schéma de la trajectoire de la goutte G

À la date t_0 = 0 s, la goutte d'encre G pénètre dans la zone de champ électrique uniforme au niveau du point O avec une vitesse initiale notée $\vec{v_0} = v_0.\vec{i}$.

On suppose que l'action mécanique de l'air est négligeable deva nt les autres actions.

Q1. Indiquer les signes des charges portées par les plaques P_1 et P_2 sachant que la goutte chargée négativement est déviée vers le haut (sens des *z* croissants) puis justifier que le vecteur champ électrique $\vec{E}$ est orienté de P_1 vers P_2.

La goutte porte une charge négative et elle est attirée vers la plaque P_1 située en haut, donc la plaque P_1 porte des charges de signe positif.

Le vecteur $\vec{E}$ est toujours orienté vers la plaque chargée négativement, donc la plaque P_2 porte des charges négatives, et la plaque P_1 porte des charges positives. (autre possibilité : $\vec{F_e} = q.\vec{E}$ avec q <0 donc $\vec{F_e}$ et $\vec{E}$ sont opposés. $\vec{F_e}$ est orientée vers le P_1 donc $\vec{E}$ est orienté vers P_2 ou encore $\vec{E} = -E.\vec{k}$ donc $\vec{E}$ est opposé à $\vec{k}$)

On suppose que la valeur du poids de la goutte d'encre G est négligeable par rapport à celle de la force électrique subie dans le déflecteur.

Q2. Établir l'expression du vecteur accélération $\vec{a_G}$ de la goutte d'encre en fonction de le masse *m*, de la charge *q* et du vecteur champ électrique $\vec{E}$ entre les plaques du déflecteur.

On applique la deuxième loi de Newton au système {goutte} dans le référentiel du laboratoire considéré galiléen.

$$\Sigma\vec{F_{ext}} = m.\vec{a_G}$$

La force électrostatique prédomine sur les autres forces, alors $\vec{F_e} = m.\vec{a_G}$.

$$q.\vec{E} = m.\vec{a_G}$$

$$\vec{a_G} = \frac{q}{m}.\vec{E}$$

Comme q < 0, le vecteur $\vec{a_G}$ et le vecteur $\vec{E}$ ont des sens opposés. Conseil : dessiner ces vecteurs sur la figure 2.

Q3. Montrer que les équations horaires x_G *t*) et z_G *t*) du mouvement de la position de la goutte d'encre G dans le déflecteur sont données par les relations : $\begin{cases} x_G(t) = v_0.t \\ z_G(t) = -\frac{1}{2}.\frac{q.E}{m}.t^2 \end{cases}$

En projection du vecteur $\vec{a_G}$ selon les axes Ox et Oz du repère et compte tenu du sens du vecteur $\vec{E}$ et du signe négatif de *q* il vient :

$$\vec{a_G}\begin{cases} a_{Gx} = 0 \\ a_{Gz} = -\frac{q}{m}.E > 0 \end{cases}$$

> Pourquoi ce signe – pour a_{Gz} ?
>
> D'après la 2e loi de Newton $\vec{a}$ et $\vec{F_e}$ ont même sens et même direction.
>
> Alors il faut que a_{Gz} >0 avec q <0 il faut ajouter ce –.
>
> Autre explication : a_{Gz} = q/m.E_z or E_z = – E alors a_{Gz} = -q/m.E.

$\vec{a}_G = \dfrac{d\vec{v}_G}{dt}$ donc $a_{Gx} = \dfrac{dv_{Gx}(t)}{dt}$ et $a_{Gz} = \dfrac{dv_{Gz}(t)}{dt}$

Ainsi en primitivant on obtient $\vec{v}_G \begin{cases} v_{Gx}(t) = Cte_1 \\ v_{Gz}(t) = -\dfrac{q.E}{m}.t + Cte_2 \end{cases}$

On détermine les constantes avec les conditions initiales.

Coordonnées du vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0$: $\vec{v}_0 \begin{cases} v_{0x} = v_0 \\ v_{0z} = 0 \end{cases}$

Compte tenu du vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0 = \vec{v}(t=0)$ on a :

$v_0 = Cte_1$

$0 = 0 + Cte_2$

Finalement : $\vec{v}_G \begin{cases} v_{Gx}(t) = v_0 \\ v_{Gz}(t) = -\dfrac{q.E}{m}.t \end{cases}$

À chaque instant $\vec{v}_G = \dfrac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$ donc $v_{Gx} = \dfrac{dx_G(t)}{dt}$ et $v_z = \dfrac{dz_G(t)}{dt}$

En primitivant on obtient $\overrightarrow{OG} \begin{cases} x_G(t) = v_0.t + Cte_3 \\ z_G(t) = -\dfrac{1}{2}.\dfrac{q.E}{m}.t^2 + Cte_4 \end{cases}$

Conditions initiales, à $t = 0$ s, la goutte est au point de coordonnées O($x_G(0) = 0$; $z_G(0) = 0$) donc :

$0 = 0 + Cte_3$

$0 = 0 + 0 + Cte_4$

Finalement, on obtient les équations horaires $\overrightarrow{OG} \begin{cases} x_G(t) = v_0.t \\ z_G(t) = -\dfrac{1}{2}.\dfrac{q.E}{m}.t^2 \end{cases}$.

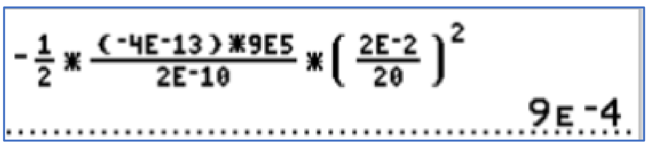
Q4. Exprimer la date t_S à laquelle la goutte d'encre G sort du déflecteur puis montrer que la valeur de la déviation HS est d'environ 0,9 mm.

Lorsque la goutte sort du déflecteur alors son abscisse $x_G = L$.

$L = v_0.t_S$ donc $t_S = \dfrac{L}{v_0}$.

La déviation HS = $z_G(t_S) = -\dfrac{1}{2}.\dfrac{q.E}{m}.t_S^2$

$$z_G(t_S) = -\frac{1}{2}.\frac{q.E}{m}.\left(\frac{L}{v_0}\right)^2$$



HS = $z_G(t_S) = -\dfrac{1}{2}.\dfrac{\left(-4\times10^{-13}\right)\times9\times10^{5}}{2\times10^{-10}}\times\left(\dfrac{2\times10^{-2}}{20}\right)^2$ = 9×10^{-4} m = 0,9 mm

Q5. Exprimer les coordonnées du vecteur vitesse $\overrightarrow{v_S}$ de la goutte d'encre G à la date t_S.

$\overrightarrow{v_S} \begin{cases} v_{Sx}(t_S) = v_0 \\ v_{Sz}(t_S) = -\dfrac{q.E}{m}.t_S \end{cases}$

Q6. Montrer que la valeur de l'angle *α* entre l'axe (*Ox*) et le vecteur vitesse $\overrightarrow{v_S}$ est donnée par la relation :

$$\tan\alpha = -\frac{q.E.L}{m.v_0^2}$$

$$\tan\alpha = \frac{opp}{adj} = \frac{v_{Sz}(t_S)}{v_{Sx}(t_S)} = \frac{-\frac{q}{m}.E.t_S}{v_0} = -\frac{q}{m.v_0}.E.t_S$$

On a vu en Q4 que $t_S = \frac{L}{v_0}$, donc $\tan\alpha = -\frac{q}{m.v_0}.E.\frac{L}{v_0} = -\frac{q.E.L}{m.v_0^2}$

On suppose que le mouvement de la goutte entre le point S et le support d'impression est rectiligne uniforme.
Q7. En déduire la valeur de la hauteur H'I du point d'impact I de la goutte sur le support d'impression. Commenter.

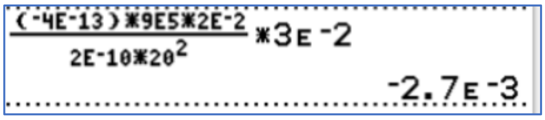
Dans le triangle rectangle SIS' rectangle en S', on a $\tan\alpha = \frac{opp}{adj} = \frac{S'I}{SS'}$.

S'I = tan α . SS'
S'I = tan α . *D*

H'I = H'S + S'I
H'I = HS + S'I
H'I = HS + tan α . *D*

H'I = HS $-\frac{q.E.L}{m.v_0^2}.D$

H'I = $0{,}9\times10^{-3} - \frac{(-4\times10^{-13})\times9\times10^{5}\times2\times10^{-2}}{2\times10^{-10}\times20^{2}}\times3\times10^{-2}$



H'I = $0{,}9\times10^{-3} - (-2{,}7\times10^{-3}) = 3{,}6\times10^{-3}$ m = 3,6 mm
Commenter : L'énoncé indique que la hauteur moyenne des caractères est de 3 mm, donc cette valeur de 3,6 mm qui en est proche est en accord.

Q8. Proposer, en justifiant, plusieurs moyens permettant d'augmenter la taille du caractère imprimé sur le support d'impression.
Il faut que H'I soit la plus grande possible.

H'I = HS $-\frac{q.E.L}{m.v_0^2}.D$ avec HS = $-\frac{1}{2}.\frac{q.E}{m}.\left(\frac{L}{v_0}\right)^2$

H'I = $-\frac{1}{2}.\frac{q.E}{m}.\left(\frac{L}{v_0}\right)^2 - \frac{q.E.L}{m.v_0^2}.D$

H'I = $-\frac{1}{2}.\frac{q.E}{m}.\frac{L^2}{v_0^2} - \frac{q.E.L}{m.v_0^2}.D$

H'I = $-\frac{q.E.L}{m.v_0^2}.\left(\frac{1}{2}.L + D\right)$

À l'aide de cette formule, on peut voir les paramètres qui influent sur H'I.
On peut augmenter *L* et/ou *D* et/ou *E* et/ou *q*.
On ne peut pas modifier la masse *m* de la goutte.
On peut diminuer la vitesse d'injection v_0 de la goutte.
Remarque : On demande plusieurs moyens, mais la réponse semble en réalité plus complexe.
En effet on ne doit pas trop augmenter HS, sinon la goutte risque de toucher la plaque P1.
Donc il ne faut pas augmenter ni *E*, ni *L*, ni *q* qui modifient à la fois HS et H'I.

On peut seulement augmenter *D* qui ne modifie pas HS mais augmente H'I.